

## Rappel

Une suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  diverge ou est divergente si

$$\forall l \in \mathbb{Q}, \exists \varepsilon > 0 \text{ tq } \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N \\ \text{tq } |x_n - l| > \varepsilon.$$

## Exemple 3.13

Soit  $(x_n)_{n \geq 0}$ , la suite définie par  $x_n = (-1)^n$ . Alors,  $(x_n)$  est divergente

Ab absurdo :  $\exists l \in \mathbb{R}$  tq  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$   
tq  $\forall n \geq N, |x_n - l| \leq \varepsilon$ .

Soit  $l \in \mathbb{R}$  comme ci-dessus, Posons  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ . Soit  $N \in \mathbb{N}$ , tq  $\forall n \geq N$ ,  
 $|x_n - l| \leq \frac{1}{2}$

Remarquons que  $|x_N - x_{N+1}|$   
 $= |(-1)^N - (-1)^{N+1}| = |(-1)^N + (-1)^N|$   
 $= 2|(-1)^N| = 2.$

De plus, vu que  $N, N+1 \geq N$   
on conclut

$$\begin{aligned} 2 &= |x_N - x_{N+1}| = |x_N - l + l - x_{N+1}| \\ &\leq \underbrace{|x_N - l|}_{\leq \frac{1}{2}} + \underbrace{|x_{N+1} - l|}_{\leq \frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \text{↯} \end{aligned}$$

Contradiction, donc  $(x_n)$  diverge.

### Définition 3.14

Soit  $(x_n)_{n \geq 0}$ , une suite. On dit que

(i)  $(x_n)$  tend vers l'infini si

$$\forall M \geq 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq N, \\ x_n \geq M.$$

On note alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$

(ii)  $(x_n)$  tend vers moins l'infini si

$$\forall M \geq 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq N, \\ x_n \leq -M$$

On note alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$

### Remarque 3.15

Une suite qui tend vers l'infini a moins l'infini n'est pas bornée.

En particulier, elle diverge.

### Exemples 3.16

(i) Soit  $(x_n)_{n \geq 0}$  définie par

$x_n = n$ . Alors, montrons que  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ .

RdP:  $x_n \geq M$ ,  $n \geq M$

$\rightarrow N = \lceil M \rceil$

Soit  $M \geq 0$  quelconque. Posons  
 $N = \lceil M \rceil$ . Soit  $n \geq N$  quelconque. Alors,  
 $x_n = n \geq N = \lceil M \rceil \geq M$ .

Puque  $n$  est quelconque, on a le résultat

(ii) Soit  $\alpha > 1$  et  $(x_n)_{n \geq 0}$  la suite géométrique définie par  $x_n = \alpha^n$ .

Montrons que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ .

RdP:  $x_n \geq M \Leftrightarrow \alpha^n \geq M$

$$n \cdot \log(\alpha) \geq \log(M)$$

$$n \geq \frac{\log(M)}{\log(\alpha)}$$

Si  $0 \leq M \leq 1$ ,  $N = 0$

si  $M > 1$ ,  $N = \left\lceil \frac{\log(M)}{\log(\alpha)} \right\rceil$

Soit  $M \geq 0$  quelconque. On distingue 2 cas :

Cas 1 :  $0 \leq M \leq 1$ . Posons  $N = 0$ .

Soit  $n \geq N$  quelconque. Alors,

$$x_n = \alpha^n \geq 1^n = 1 \geq M.$$

Donc que  $n$  est quelconque, on a le résultat dans ce cas.

Cas 2 :  $M > 1$ . Posons  $N = \left\lceil \frac{\log(M)}{\log(\alpha)} \right\rceil$

Soit  $n \geq N$  quelconque. Alors,



$$\begin{aligned}
 x_n &= \alpha^n = e^{n \cdot \log(\alpha)} \geq e^{N \cdot \log(\alpha)} \\
 &= e^{\left\lceil \frac{\log(M)}{\log(\alpha)} \right\rceil \cdot \log(\alpha)} \geq e^{\frac{\log(M)}{\log(\alpha)} \cdot \log(\alpha)} \\
 &= e^{\log(M)} = M.
 \end{aligned}$$

$\forall n$  que  $n$  est quelconque, on a le résultat dans ce cas.

La combinaison des deux cas est le résultat voulu.

(iii) Plus généralement, soit  $(x_n)_{n \geq 0}$  une suite croissante non-majörée.  
Alors,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ .

$$\neg (\exists M \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall n \geq 0, x_n \leq M) \\
 \forall M \in \mathbb{R}, \exists n \geq 0, \text{ tq } x_n > M.$$

Av:  $\forall M \geq 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq N, x_n > M$

Soit  $M \geq 0$  quelconque. Soit  $\bar{n} \geq 0$

tq  $x_{\bar{n}} > M$ . Posons  $N = \bar{n}$

Soit  $n \geq N$  quelconque.



## Proposition 3.17 Propriétés algébriques des limites.

Soit  $(x_n)_{n \geq 0}$  et  $(y_n)_{n \geq 0}$  deux suites et  $a, b \in \mathbb{R}$  tq  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$

Alors,

(i) la suite  $z_n = x_n + y_n$  converge vers  $a+b$

(ii) la suite  $z_n = x_n \cdot y_n$  converge vers  $a \cdot b$ .

(iii) Si  $b \neq 0$ , la suite  $z_n = \frac{x_n}{y_n}$  converge vers  $\frac{a}{b}$

(iv) Si  $\exists N \in \mathbb{N}$  tq  $\forall n \geq N, x_n \leq y_n$  alors,  $a \leq b$ .

Preuve de (ii)

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}$  tq  $\forall n \geq N_1, |x_n - a| \leq \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}$  tq  $\forall n \geq N_2, |y_n - b| \leq \varepsilon$

Par la proposition 3.1

$\exists c \geq 0$  tq  $\forall n \geq 0, |x_n| \leq c$

À montrer:  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$  tq  $\forall n \geq N,$

$$|z_n - a \cdot b| \leq \varepsilon.$$

Soit  $\varepsilon > 0$  quelconque. Par la prop. 3.11,  
Soit  $C \geq 0$  tq  $\forall n \geq 0, |x_n| \leq C.$

Par définition de  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ,  $\exists N_1 \in \mathbb{N}$   
tq  $\forall n \geq N_1, |x_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{C + |b|}$

Soit donc  $N_1$  comme ci-dessus.

Par définition de  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ ,  $\exists N_2 \in \mathbb{N}$   
tq  $\forall n \geq N_2, |y_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{C + |b|}$

Soit donc  $N_2$  comme ci-dessus.

Posons  $N = \max \{N_1, N_2\}$

Soit  $n \geq N$  quelconque.

$$|z_n - a \cdot b| = |x_n \cdot y_n - a \cdot b|$$

$$= |x_n y_n - x_n \cdot b + x_n \cdot b - a \cdot b|$$

$$\leq |x_n \cdot y_n - x_n \cdot b| + |x_n \cdot b - a \cdot b|$$

$$= \underbrace{|x_n|}_{\leq C} \cdot \underbrace{|y_n - b|}_{\leq \frac{\varepsilon}{C + |b|}} + |b| \cdot \underbrace{|x_n - a|}_{\leq \frac{\varepsilon}{C + |b|}} \quad (n \geq N \geq N_2)$$

$$\leq C \cdot \frac{\varepsilon}{C+|b|} + |b| \frac{\varepsilon}{C+|b|}$$

$$= \varepsilon \frac{C+|b|}{C+|b|} = \varepsilon.$$

$n$  étant quelconque, on a le résultat voulu. ■

### Exemples 3.18

(i) Déterminons la limite de  $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$

On a vu à l'exemple 3.9 que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$   
et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$

$$\text{Ainsi, } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \\ = 0 + 0 = 0$$

(ii) Soit  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $(x_n)_{n \geq 0}$ ,  $(y_n)_{n \geq 0}$

deux suites convergentes. Montrons  
que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$   
 $+ \beta \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$

Posons deux suites constantes  $a_n = \alpha$ ,  
 $\beta_n = \beta$ . On a vu (exemple 3.9)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha \quad \& \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \beta.$$

Ainsi;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha \cdot x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n \cdot x_n) \stackrel{(ii)}{=} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \right) \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right)$$

$$= \alpha \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

$$\text{Ici on, } \lim_{n \rightarrow \infty} (\beta \cdot y_n) = \beta \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

Pour finir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha x_n + \beta y_n) \stackrel{(i)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha \cdot x_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} (\beta \cdot y_n)$$

$$= \alpha \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \beta \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

(iii) Soit  $(x_n)_{n \geq 1}$  la suite définie par

$$x_n = \frac{3n+4}{2n^2+4n+2}$$

$$= \frac{n}{n^2} \cdot \frac{3 + 4 \cdot \frac{1}{n}}{2 + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2}}$$

Annotations:   
 -  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$  (pink arrow)   
 -  $\frac{4}{n} \rightarrow 0$  (blue arrow)   
 -  $\frac{2}{n^2} \rightarrow 0$  (blue arrow)   
 - The numerator  $3 + 4 \cdot \frac{1}{n}$  is circled in purple and labeled  $\rightarrow 3$ .   
 - The denominator  $2 + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2}$  is circled in purple and labeled  $\rightarrow 2$ .   
 - A bracket under the denominator is labeled  $\rightarrow \frac{3}{2}$  (pink arrow).

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \cdot \frac{3}{2} = 0.$$

(iv) Soit  $x_n = (-1)^n$ ,  $y_n = (-1)^{n+1}$

On a vu que  $(x_n)$  &  $(y_n)$  divergent

Si on pose  $z_n = x_n + y_n$ , on a

$$z_n = (-1)^n + (-1)^{n+1} = (-1)^n - (-1)^n = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0.$$

n 'existent pas

⚠  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n \neq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$

Remarque 3.19:

(i) Pour avoir le droit d'écrire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

il suffit que 2 des 3 limites existent. La 3<sup>ème</sup> existe alors automatiquement.

Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n)$  &  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  existent,

$$y_n = (x_n + y_n) - x_n$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

(ii)  dans (iv) si on remplace " $\leq$ " par "<", le résultat est faux.

par exemple  $x_n = \frac{1}{n}$  et  $y_n = 0$ , alors,  
 $\forall n, x_n > y_n$ , mais

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

### §3.3 Critères de convergence pour les suites

Théorème 3.20 (critère des 2 gendarmes)

Soient  $(x_n)_{n \geq 0}$ ,  $(y_n)_{n \geq 0}$  et  $(z_n)_{n \geq 0}$  trois suites. Supposons que

(i)  $(x_n)$  et  $(z_n)$  convergent vers la même limite  $l$

(ii)  $\exists k \in \mathbb{N}$  tq  $\forall n \geq k$ ,

$$x_n \leq y_n \leq z_n.$$

Alors,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = l$ .



Preuve.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq N_1, |x_n - l| \leq \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \text{ tq } \forall n \geq N_2, |z_n - l| \leq \varepsilon$$

$$\exists h \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq h, x_n \leq y_n \leq z_n.$$

A montrer:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq N, |y_n - l| \leq \varepsilon$$

$$\text{Soit } h \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq h, x_n \leq y_n \leq z_n$$

Soit  $\varepsilon > 0$  quelconque.

Par définition de  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ ,

$$\text{Soit } N_1 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq N_1,$$

$$|x_n - l| \leq \varepsilon$$

Par définition de  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = l$ ,

$$\text{Soit } N_2 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq N_2, |z_n - l| \leq \varepsilon$$

$$\text{Posons } N = \max \{ h, N_1, N_2 \}.$$

Soit  $n \geq N$  quelconque.

$\forall n$  que  $|x_n - l| \leq \varepsilon$   
( $n \geq N \geq N_1$ ), on a

$$-\varepsilon \leq x_n - l \leq \varepsilon \quad (1)$$

$\forall n$  que  $|z_n - l| \leq \varepsilon$ ,  
( $n \geq N \geq N_2$ ), on a

$$-\varepsilon \leq z_n - l \leq \varepsilon. \quad (2)$$

Ainsi,

$$-\varepsilon \stackrel{(1)}{\leq} x_n - l \leq y_n - l \leq z_n - l \stackrel{(2)}{\leq} \varepsilon$$

$n \geq N \geq h$

On déduit que

$$-\varepsilon \leq y_n - l \leq \varepsilon, \text{ i.e. } |y_n - l| \leq \varepsilon$$

qui est le résultat voulu. ■

## Corollaire 3.21 (corollaire du critère des deux gendarmes)

Soit  $(y_n)_{n \geq 0}$  une suite,  $l \in \mathbb{R}$ ,

$(a_n)_{n \geq 0}$  une suite de nombres positifs tq

(i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

(ii)  $\exists k \in \mathbb{N}$  tq  $\forall n \geq k$

$$|y_n - l| \leq a_n.$$

Alors,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = l.$